

LE PENDULE DE FOUCAULT AU PÔLE NORD

UNE ANALYSE DES TRAJECTOIRES DE LA BOULE

Pierre Lauginie,
Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay (GHDSO)
Université Paris-Saclay

pierre.lauginie@universite-paris-saclay.fr

Cet article est précédé d'une longue introduction explicative.

Introduction

Vous rêvez que vous êtes au pôle Nord. Vous avez transporté et installé le pendule de Foucault (noté « le Pendule ») au pôle Nord sur la banquise, un grand pendule bien sûr, il y a de la place, et avec un système d'entretien pour maintenir l'oscillation aussi longtemps que nécessaire. C'est l'hiver, sinon gare au glou-glou. Il fait donc nuit, la longue nuit polaire. Bételgeuse, en sa robe orange, plane à quelques degrés au-dessus de l'horizon, elle en fait le tour en un jour sidéral, pratiquement 24 heures. Vous avez lancé le pendule de Foucault dans sa direction. Obstinément, la boule suit l'étoile et n'en démord pas, sa trace sur le sol fait un tour en un jour. Un pendule rigidement rivé aux étoiles, une Terre qui « tourne en dessous » : tout est dans l'ordre. Cela mérite-t-il discussion ?

Vous voilà réveillé. Vous êtes frustré. La veille, vous aviez tenté d'installer le Pendule – un « petit » pendule cette fois – dans votre collège, voire sur votre table d'expériences. Et son mouvement était erratique, jusqu'à, parfois, pivoter dans le « mauvais sens ». La Terre était-elle devenue folle ? Nous verrons en détail ultérieurement comment y parer dans une large mesure à l'aide d'un accessoire très simple : l'anneau de Charron.

Pour en comprendre le fonctionnement, une analyse fine – rarement effectuée – de la forme des trajectoires et de leur loi temporelle est nécessaire. Pour cela, nous nous plaçons au pôle Nord, le comportement à toute autre latitude étant qualitativement le même (à une minuscule approximation près, qui sera précisée dans un article ultérieur).

Naturellement, pour imager ces trajectoires, nous devons faire une sorte de « zoom » en supposant un petit nombre d'oscillations du pendule par tour de Terre, au lieu de milliers dans le cas réel. En même temps, nous en apprendrons un peu plus :

- sur la dépendance – qui peut surprendre – des formes de trajectoires selon les conditions initiales de lancement ;

- sur les modifications – et les permanences – à attendre lorsqu'on sort de l'approximation harmonique ;
- sur le fondement de la description du mouvement du Pendule réel comme « un plan d'oscillation qui tourne autour de la verticale » ;
- et peut-être, trouverez-vous là un bel exemple – non trivial mais pédagogique – pour illustrer votre cours sur les changements de référentiels !

Le Pendule au pôle : mouvement dans le référentiel de Copernic

Le Pendule est donc au pôle Nord, la boule assimilée à un point matériel de masse m . Nous nous plaçons dans *l'approximation harmonique*, valable aux « petites elongations angulaires » ; cela signifie que la force de rappel due à la gravité, proportionnelle au sinus de l'elongation angulaire, est considérée comme proportionnelle à cette elongation elle-même. Dans ce cadre :

- le fonctionnement du pendule est celui d'un *oscillateur harmonique* ;
- la courbe décrite par la « boule » dans l'espace est assimilée à sa projection sur le sol (valable dans cette approximation) ;
- la trajectoire effective dépend des conditions initiales, position et vitesse à l'instant du lancement.

Reportons-nous à la figure 1. La position M de la boule est rapportée à deux systèmes de coordonnées cartésiennes planes, ou « référentiels » centrés au pôle O :

- les axes (OX, OY) liés aux étoiles – le ciel – représentent le référentiel de Copernic, notre référence en tant que *référentiel d'inertie* ou *galiléen* ;
- les axes (Ox, Oy) liés à la Terre pivotent autour de O dans le sens antihoraire à la vitesse angulaire correspondant à un tour en un jour sidéral (23 h 56 min, approx. 24 h). Les axes Ox et OX coïncident à l'instant zéro.

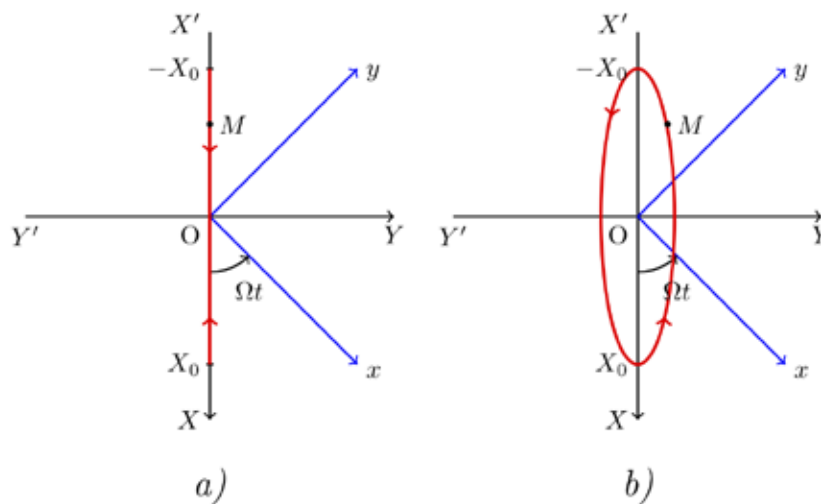


Fig.1. Axes de référence et trajectoires de la boule (en rouge) dans le référentiel de Copernic : a) Conditions initiales de type 1 ; b) Conditions initiales de type 2 (le petit axe de l'ellipse a été volontairement exagéré).
Le point M représente la position de la boule à un instant donné.

Un paramètre important est le *nombre k d'oscillations du pendule par tour de Terre* ; il serait, par exemple, de l'ordre de 5 000 avec le pendule du Panthéon. C'est aussi le rapport de la pulsation ω du pendule à la vitesse angulaire Ω de la Terre : $k = \omega/\Omega$.

Dans le référentiel de Copernic, la seule force agissante est la force de rappel due à la gravité. Dans toute la suite, nous nous référerons aux deux types principaux de conditions initiales (dites C.I.) :

- **C.I. de type 1** (dites « type Copernic » in LeDocument 1.1.1) : à l'instant initial, le pendule est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale, *relativement au référentiel de Copernic*, d'un point de l'axe OX d'abscisse X_0 ¹.

La boule décrit alors (fig. 1, a) le segment $(-X_0, X_0)$ de l'axe $X'X$ selon une loi sinusoïdale dans le temps.

- **C.I. de type 2** (dites « type Terre » in LeDocument 1.1.2) : à l'instant initial, le pendule est écarté de sa position d'équilibre et lâché, du même point de l'axe OX , sans vitesse initiale *relativement au référentiel terrestre*². La boule possède alors une petite vitesse initiale dirigée vers l'est (c'est à dire dans la direction OY) due à la rotation de la Terre. La trajectoire résultante (LeDocument 1.1.2) est une ellipse droite ayant pour demi grand axe X_0 et pour demi petit axe X_0/k (fig. 1 b). Il est important de souligner que, dans ce cas, la trajectoire de la boule *ne passe jamais par l'origine*³.

1 Vous vous demandez comment lancer le pendule sans vitesse initiale par rapport aux étoiles alors qu'on est soi-même entraîné par la rotation de la Terre. Faudrait-il être hors de Terre, ange ou bon Dieu, pour cela ? Heureusement on peut facilement réaliser cela sur Terre via les C.I. suivantes : à l'instant initial, pendule immobile, boule à l'origine ; on donne à la boule une impulsion instantanée, un bon coup de marteau qui lui donne une vitesse initiale dans la direction OX . Le mouvement est simplement déphasé d'un quart de période dans le temps. Mais qui oserait donner un coup de marteau dans la boule ?

2 Ces conditions initiales sont celles le plus souvent réalisées dans les démonstrations publiques.

3 Il est donc dans ce cas incorrect, en toute rigueur, de dire, comme le font souvent les démonstrateurs, que « la boule va tout droit relativement aux étoiles » ; en pratique, k étant grand, l'ellipse est évidemment très aplatie.

Le pendule au pôle : mouvement dans le référentiel terrestre

Dans le document complet, la position de la boule dans le plan horizontal, définie par le vecteur $\overrightarrow{OM}$, est représentée, dans chaque référentiel, par un nombre complexe.

La multiplication par un nombre complexe de module unité équivaut à une rotation du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le changement de référentiel s'effectue alors on ne peut plus simplement : il suffit, pour « faire tourner la Terre », et pour chaque type de conditions initiales, de multiplier le nombre complexe représentant la position de la boule par le nombre complexe représentant la rotation⁴. Le traitement complet est donné dans (LeDocument 1.2). Nous nous intéressons ici directement au résultat, la forme des trajectoires :

- **pour les C.I. de type 1** : c'est un « plan d'oscillation » que l'on fait tourner (cf. fig. 1, a). Le résultat, par exemple pour $k = 10$, (LeDocument, 1.2.1) est la jolie marguerite de la figure (2, a).

- **pour les C.I. de type 2** : dans ce cas, c'est une ellipse que l'on doit faire tourner ; il n'y a plus de « plan d'oscillation » ! On obtient, toujours pour $k = 10$, (LeDocument, 1.2.2) la jolie hypocycloïde⁵ de la figure (2, b). Noter le « trou » au centre, de rayon X_0/k . Pour des valeurs de k plus grandes, par exemple $k = 50$, on obtient la figure 3 : cela commence à ressembler au cas réel où les lobes sont tellement aplatis qu'on ne distingue plus leur forme. Dans le cas des C.I. de type 2, on notera cependant qu'il reste un petit trou au centre (rayon $1/k$ du rayon extérieur) confirmant que, strictement, le centre n'est jamais visité pour ce type de C.I. Voir aussi, k non entier in (LeDocument, Annexe A).

4 Cela va loin, le nombre devenant ainsi opérateur : algébrisation de la géométrie et géométrisation du nombre.

5 On démontre en effet qu'il s'agit d'une hypocycloïde : courbe décrite par un point d'une roue de diamètre $(1 - 1/k)$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon 1.

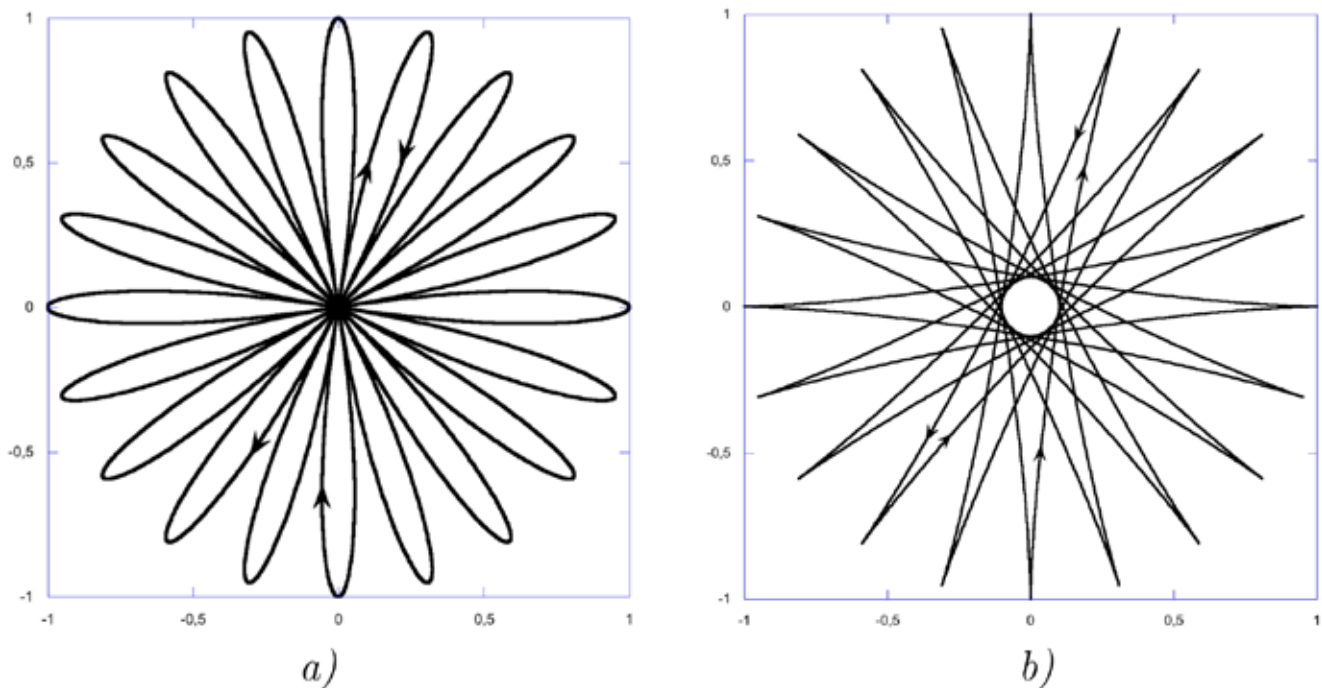


Fig.2. Trajectoires de la boule dans le référentiel terrestre pour $k = 10$ (soit 10 oscillations du pendule par tour de Terre). On a pris $X_0 = 1$. a) C.I. de type 1 ; b) C.I. de type 2.

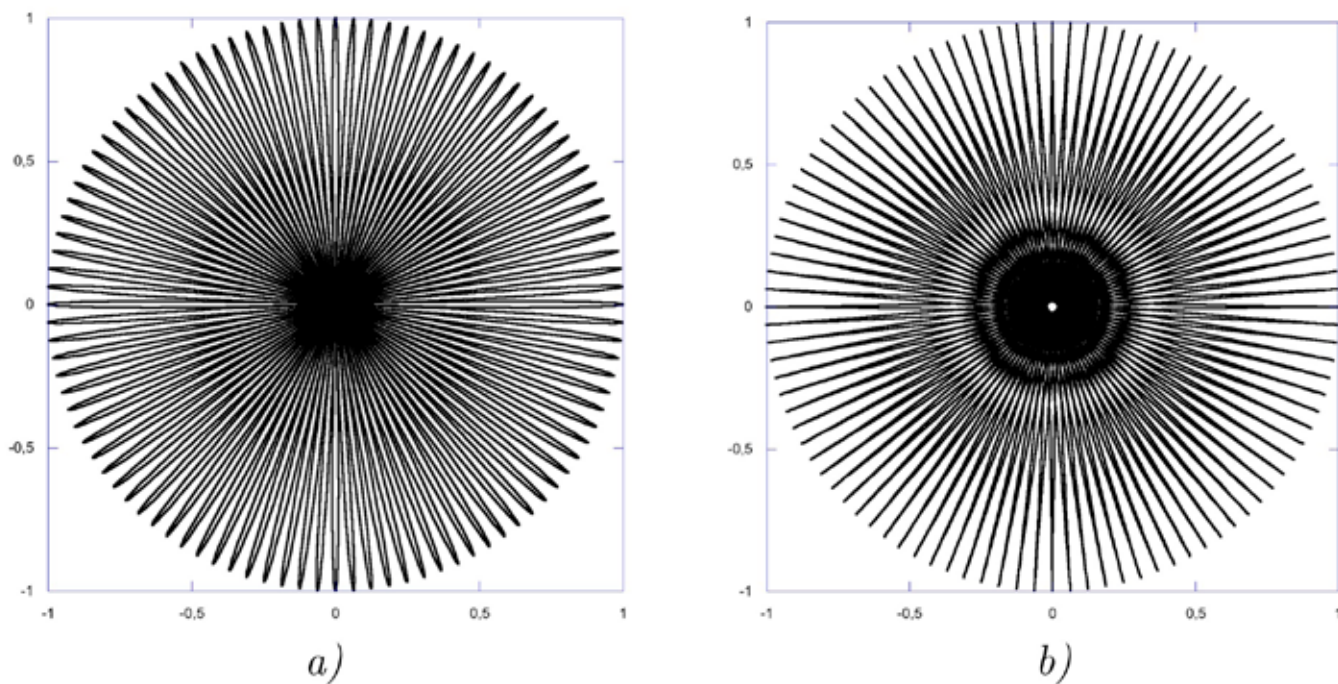


Fig.3. Trajectoires de la boule dans le référentiel terrestre pour $k = 50$ (soit 50 oscillations du pendule par tour de Terre). On a pris $X_0 = 1$. a) C.I. de type 1 ; b) C.I. de type 2.

• et pour des C.I. quelconques : les deux solutions précédentes de l'équation du mouvement sont linéairement indépendantes (non identiquement proportionnelles l'une à l'autre) : toute autre solution, pour des C.I. quelconques, sera une combinaison linéaire des deux solutions déjà obtenues. On notera que, malgré la grande différence d'allure des deux solutions de base, la symétrie globale est conservée. Bonne leçon !

Le Pendule au pôle : bilan des forces

Nous n'avons pas, jusqu'ici, explicité les différentes forces – de gravité et d'inertie – agissant dans le référentiel terrestre. Il est instructif de le faire, en vue d'une compréhension plus physique du phénomène. Un traitement mathématique complet est donné dans (LeDocument 1.2.4). Le résultat – obtenu de

façon naturelle sans connaissances préalables sur les changements de référentiels – n'étonnera pas ceux qui ont subi un enseignement sur ce thème ; en effet, il apparaît que, dans le référentiel terrestre, la boule du Pendule est soumise à trois forces :

- la force de rappel due à la gravité, proportionnelle, dans notre approximation harmonique, à l'élongation OM ;
- la force d'inertie centrifuge, radiale au pôle, dirigée vers l'extérieur, proportionnelle au carré Ω^2 de la vitesse angulaire de la Terre ;
- un troisième terme – ici le plus intéressant – la force d'inertie dite « *de Coriolis* » : proportionnelle à la vitesse angulaire Ω de la Terre et à la vitesse relative de la boule dans le référentiel terrestre, elle est dirigée *vers la droite du mouvement* pour une rotation diurne dans le sens direct (cas de l'hémisphère nord).

La force de rappel et la force centrifuge, dirigées suivant $\overrightarrow{OM}$, n'ont aucun effet pour dévier la trajectoire de la direction OM . En conséquence : **La force de Coriolis est seule responsable de la déviation de la trajectoire.**

Soulignons un point important : étant proportionnelle à la vitesse relative, la force de Coriolis s'annule si cette dernière est nulle.

Et maintenant, suivons la boule ! Revenons à la figure 2.

a) **C.I. de type 1** (figure 2, a) : lâchée du point (0, -1) sans vitesse initiale par rapport aux étoiles, la boule a, par rapport à la Terre, une vitesse initiale dirigée vers l'ouest (i.e. vers la gauche de la figure). La force de Coriolis est donc *non nulle dès l'instant initial* et dévie immédiatement la trajectoire vers la droite du mouvement. Elle continue ensuite d'agir, toujours courbant la trajectoire vers la droite du mouvement. L'origine est atteinte, puisqu'elle l'est dans le référentiel de Copernic (cf. figure 1, a) et que ce point est invariant dans le changement de référentiel. Ensuite le mouvement se poursuit selon les flèches, décrivant un double lobe de marguerite au cours d'une oscillation complète.

b) **C.I. de type 2** (figure 2, b) : la boule étant lâchée du point (0, -1) sans vitesse initiale par rapport à la Terre, la force de Coriolis est nulle au départ : la boule part en direction de l'origine. Dès qu'elle acquiert une vitesse, la force de Coriolis dévie la trajectoire vers la droite comme indiqué sur la figure, celle-ci ne passe donc plus par l'origine. La boule arrive radialement en fin de demi-oscillation pour s'arrêter en un point de rebroussement, ayant décrit une portion d'hypocycloïde, puis repart en sens inverse dans les mêmes conditions qu'au départ.

« Un plan d'oscillation qui tourne » ?

Dans le référentiel de Copernic (galiléen) le mouvement de la boule en projection sur le sol est celui d'un point matériel soumis à l'action d'une unique force centrale, la force de rappel. Le mouvement a alors lieu dans ce référentiel suivant la loi des aires : le mouvement du point M s'y effectue avec une *vitesse aréolaire* constante (aire constante balayée, par unité de temps, par le vecteur $\overrightarrow{OM}$). Les implications diffèrent selon le type de conditions initiales (cf. LeDocument 1.2.5) :

C.I. de type 1 : dans ce cas, nous pouvons voir les choses directement. Nous savons déjà (fig. 1, a) que le mouvement est rectiligne dans le référentiel de Copernic. La vitesse angulaire du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est donc constamment nulle dans ce référentiel. Il s'ensuit que sa vitesse angulaire dans le référentiel terrestre est *constante* et opposée à celle de la Terre soit $-\Omega$.

Résultat très important : pour ce type de C.I., le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tourne, relativement au référentiel terrestre, à la vitesse angulaire constante $-\Omega$, opposée à celle de la Terre : tous les points de la trajectoire ont la même vitesse angulaire, et c'est le seul cas où il en est ainsi. Pour tout point M donné de la trajectoire, *la direction OM peut donc être vue comme la trace d'un plan vertical tournant dans le sens horaire à la vitesse angulaire constante $-\Omega$, opposée à celle de la Terre.*

C.I. de type 2 : ici, les choses sont moins simples car, même dans le référentiel de Copernic, le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ ne conserve pas une direction fixe au cours du temps (cf. fig. 1, b). Un traitement mathématique est donné dans (LeDocument 1.2.5).

Cependant, on peut voir les choses qualitativement : l'ellipse étant, dans les cas réels, très aplatie, la distance OM peut prendre des valeurs très petites ; on comprend que la loi des aires implique alors des variations considérables de vitesse angulaire au cours du temps, variations qui se répercuteront sur le mouvement dans le référentiel terrestre, une situation complètement différente de la précédente !

Suivons alors la rotation du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel terrestre au cours d'une oscillation sur la figure (2, b) : partant par exemple du point (-1, 0) nous voyons que ce vecteur tourne maintenant en sens inverse, dans le sens anti-horaire ! Cependant, au cours d'une oscillation, il ne fait pas tout à fait un tour complet, mais revient, avant de repartir à l'oscillation suivante, en un point de rebroussement décalé de $2\pi/k$ ($k = 10$ sur la figure) *dans le sens horaire*. Ainsi, bien que la direction OM n'ait plus rien à voir avec la trace d'un plan vertical tournant en

sens inverse de la Terre, les points de rebroussement d'ordre pair successifs *se décalent en sens horaire par sauts de $2\pi/k$ à la vitesse angulaire moyenne $-\Omega$* . Cela peut être vu comme la trace d'un plan vertical virtuel affecté de ce type de rotation saccadée, comme la trotteuse de votre montre qui tourne, par sauts d'une seconde, à la vitesse moyenne d'un tour par minute.

Pour aller plus loin

Et si la Terre tournait vite ?

Une *remarque essentielle* : à aucun moment nous n'avons eu besoin de supposer que la Terre tourne lentement relativement à la période du Pendule. Tous les résultats précédents sont donc valables quelle que soit la vitesse de rotation de la Terre, elle peut tourner aussi vite que vous voulez ! Au pôle – et insistons sur ce point : *au pôle* – il n'y a pas d'approximation, la vitesse Ω peut être aussi grande que l'on veut, et donc le paramètre k aussi petit que l'on veut, jusqu'à l'unité ; c'est cela qui nous a autorisés à tracer les figures (2, *a*) et (2, *b*), réalisant une sorte de zoom sur le détail du mouvement.

Et si l'on sortait de l'approximation harmonique ?

Si l'on tenait compte de l'anharmonicité du pendule – c'est à dire que la force de rappel n'est pas proportionnelle à l'amplitude angulaire mais à son sinus, – la rotation d'ensemble de la trajectoire à vitesse – Ω dans le référentiel terrestre en serait-elle modifiée ? La réponse est non, mais avec réserves car cela dépend des conditions initiales.

- **C.I. de type 1** : en ce cas, rien n'est changé. En effet, le mouvement du pendule demeure alors rectiligne et périodique dans le référentiel de Copernic, donc développable en série de Fourier. Ce qui est vrai pour la pulsation ω l'est pour chacun des harmoniques séparément, en particulier la rotation s'effectue à la même vitesse angulaire W pour chacun d'eux ; la forme des

trajectoires de la figure (2, *a*) est plus ou moins modifiée, mais la rotation d'ensemble à vitesse Ω , ainsi que la vision d'un plan tournant continûment en sens horaire à vitesse Ω est inchangée.

- **C.I. de type 2** : un léger bémol doit être mis dans ce cas. Nous verrons dans un prochain article, que si la trajectoire dans le référentiel de Copernic est plus ou moins « ovalisée » – et elle l'est dans ce cas (cf. fig. 1, *b*) – l'anharmonicité entraîne une rotation parasite dite « apsidale ». Cette dernière est cependant totalement négligeable si l'amplitude du pendule est limitée à $\sim 0,1$ radian, ce qui est toujours réalisé en pratique.

En conclusion, la vision populaire d'un « plan tournant en sens horaire » à vitesse Ω que ce soit continûment ou par sauts – est conservée dans tous les cas pratiques.

Et que dire du Pendule hors du pôle ?

Ce point méritera une discussion détaillée dans un article ultérieur. Nous pouvons cependant, dès maintenant, citer le résultat bien connu : à toute latitude λ , pourvu que la Terre tourne lentement par rapport à la période du pendule, tout se passe comme si l'on se trouvait au pôle d'une terre tournant à la vitesse angulaire $\Omega \sin \lambda$ diminuant continûment du pôle à l'équateur où elle s'annule. La présente étude restera donc valable en remplaçant partout Ω par $\Omega \sin \lambda$, d'où l'intérêt d'avoir effectué un traitement complet au pôle.

■