

LE PENDULE DE FOUCAULT (II)

ÉTUDE PRATIQUE : VAINCRE LES EFFETS D'ANHARMONICITÉ

Pierre Lauginie,
Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay (GHDSO)
Université Paris-Saclay

pierre.lauginie@universite-paris-saclay.fr

Suite de l'article paru dans le CC 182.

Introduction

Vous voilà au pied du mur : vous vouliez réaliser un pendule de Foucault de taille modeste, pour votre salle de classe, le hall de votre établissement, voire la salle d'accueil de votre mairie. Vous disposez, dans le meilleur des cas, d'une hauteur de quelques mètres. Et, comme nous l'avons laissé entendre dans l'Introduction à cette série d'articles, vous voilà profondément frustré : rien ne va comme prévu, rotation non uniforme, parfois carrément erratique, voire dans le sens opposé à celui attendu. Il y a à cela deux causes, d'autant plus effectives que le pendule est plus petit :

- la petitesse de la force de Coriolis ;
- la non-harmonicité des oscillations.

Nous allons voir comment y parer.

Rappels : Un mouvement d'oscillation est dit « harmonique » si la force de rappel est proportionnelle à l'élongation elle-même. Pour le pendule, la force de rappel est proportionnelle au sinus de l'élongation angulaire, il n'est donc harmonique qu'à la limite des amplitudes infiniment petites. Ceci a des conséquences importantes pour la fabrication d'un pendule de Foucault.

Dans l'approximation harmonique, soit T_{Pend} la période d'oscillation du pendule, ω sa pulsation, avec $\omega = 2\pi / T_{Pend}$ et soit T_{Terre} la période de rotation diurne de la Terre (un jour sidéral), et $\Omega = 2\pi / T_{Terre}$ sa vitesse angulaire. Un paramètre important est le nombre k d'oscillations du pendule par tour de Terre, soit :

$$k = T_{Terre} / T_{Pend} = \omega / \Omega \quad (1)$$

Ordre de grandeur de la force de Coriolis

Il y a deux forces principales agissant sur la boule du pendule :

- le poids de la boule, responsable de son balancement ;
- la force de Coriolis, responsable de la déviation de sa direction d'oscillation.

(l'intensité de la force centrifuge étant négligeable relativement aux deux autres).

Il est donc important de comparer les intensités de ces deux forces. Cela revient à comparer l'accélération de Coriolis $a_{Coriolis}$ à l'accélération g de la pesanteur. Nous avons vu dans l'article précédent que l'accélération de Coriolis est proportionnelle à la vitesse angulaire Ω de la Terre et à la vitesse relative v_r de la boule dans le référentiel terrestre, son intensité étant, pour un pendule placé au pôle : $a_{Coriolis} = 2\Omega v_r$ (LeDocument, 1.2.4 et eq. 1.18). Pour cette comparaison, nous prendrons donc v_r à sa valeur maximale v_{max} , c'est à dire au passage de la boule au point le plus bas. Il est intuitif que cette vitesse est proportionnelle à l'amplitude X_0 et à la pulsation ω du pendule. Pour des conditions initiales (C.I.) de type 1, nous obtenons exactement $X_0 \omega$ (cf. LeDocument eq. 1.6):

$$v_{max} = X_0 \omega = X_0 \sqrt{\frac{g}{l}} = \theta_0 \sqrt{gl} \quad (2)$$

où l est la longueur du pendule, $q_0 = X_0 / l$ l'amplitude angulaire (assimilée à sa tangente). Pour des C.I. de type 2, elle n'en diffère que par un terme négligeable de l'ordre de $1/k^2$, k étant grand en toute situation réelle. D'où le rapport cherché :

$$\frac{a_{Coriolis}}{g} = 2\Omega \theta_0 \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\theta_0 \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\theta_0}{k} \quad (3)$$

Pour une amplitude angulaire q_0 donnée, ce rapport, qui exprime l'intensité relative de la force de Coriolis, varie comme $l^{1/2}$, ou encore comme l'inverse de la période d'oscillation du pendule. D'où l'intérêt d'avoir un « grand » pendule, et d'où l'une des difficultés de réalisation de petits pendules de Foucault : on travaille sur des forces minuscules !

Exemples – Considérons deux cas réels : le pendule de la faculté d'Orsay, de petite taille (1,2 m ; période 2,2 s) et celui du Panthéon (67 m ; période 16,4 s). Les valeurs du paramètre k sont respectivement de l'ordre de 40 000 et 5 000. Dans les deux cas, $\Omega = 2\pi / 86\,160 \text{ s}^{-1}$, et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Prenons pour θ_0 une valeur réaliste de l'ordre de $1/16$ radian soit $3,5^\circ$ (correspond à une amplitude linéaire de 7,5 cm pour le pendule d'Orsay, et de 4,18 m pour le Panthéon) :

- pour le *pendule d'Orsay* :
 $a_{\text{Coriolis}} / g \sim 3,2 \cdot 10^{-6}$
- pour le *pendule du Panthéon* :
 $a_{\text{Coriolis}} / g \sim 24 \cdot 10^{-6}$

Ainsi, pour le pendule d'Orsay, la force de Coriolis à son maximum est de l'ordre de seulement *trois-millionièmes* du poids de la boule. La masse de la boule étant de 250 g, cette force maximale est égale au poids d'une masse de : $3,2 \cdot 10^{-6} \times 250 = 800 \cdot 10^{-6} \text{ g}$, soit moins d'un milligramme. Mettre en évidence le mouvement de la Terre, c'est rendre visible un effet aussi petit. On comprend alors pourquoi un pendule de petite taille est si sensible aux perturbations diverses qui atteignent facilement une telle valeur.

Pour le pendule du Panthéon, la force de Coriolis relative est d'un ordre de grandeur au-dessus, mais s'appliquant à une boule de 28 kg suspendue à un fil de 67 m soumise aux courants d'air du Panthéon, c'est encore une bien petite force, équivalente au poids d'une masse d'un peu plus d'un demi-gramme. Et cela suffit à « faire tourner la Terre » !

Les rapports ci-dessus ont été calculés en supposant nos pendules placés au pôle. Hors du pôle, ils devront encore être réduits par un facteur égal au sinus de la latitude, soit 0,75 pour Paris et ses environs (49° N), ce qui n'améliore pas les choses.

La conclusion de cette – indispensable – estimation d'ordre de grandeur est que la réalisation d'un pendule de Foucault qui fonctionne réellement requiert d'importantes précautions et du savoir-faire.

Anharmonicité du pendule : un redoutable problème de mécanique

Principale conséquence de l'anharmonicité du pendule, la période d'oscillation T dépend de l'amplitude angulaire θ_0 du mouvement. Si T_0 est la période à la limite des amplitudes infiniment petites, on a, en se limitant au premier terme correctif (i.e. amplitudes encore « pas trop grandes ») :

$$T \sim T_0 (1 + \theta_0^2 / 16) \quad (4)$$

L'allongement de période est d'environ 0,05 % pour une amplitude de 5° et 0,2 % pour 10° ; on pourrait penser que cela est négligeable et ne pose aucun problème, d'autant que l'amplitude réelle ne dépasse pas 4° environ (valeur maximale au Panthéon par exemple). Il n'en est rien !

Tout irait bien si, *en l'absence de rotation de la Terre*, la trajectoire de la boule, lâchée sans vitesse initiale, était rectiligne. C'est un cas idéal – envisagé jusqu'ici – mais qui ne marche que sur le papier ! Un pendule réel est soumis à diverses perturbations aléatoires rendant le mouvement de la boule plus ou moins elliptique :

- courants d'air aléatoires (même dans une cage de verre, d'ailleurs non étanche) dus notamment aux différences locales de température dans la pièce ;
- chocs et vibrations diverses du support et du bâtiment ;
- anisotropie du fil de suspension (surtout avec des fils métalliques, pratiquement pas avec un fil textile « bien tissé »).

Or, si le mouvement est elliptique, cela peut devenir *catastrophique* en raison du cumul des erreurs de trajectoire. Soit par exemple une trajectoire elliptique de demi grand axe a et de demi petit axe b (figure 1) ; la période selon le grand axe est un peu plus grande que selon le petit axe ; en conséquence, au bout d'un aller-retour « en long », le mobile aura fait un peu plus d'un aller-retour « en large ». Le résultat est que la trajectoire ne se referme plus : on peut la décrire, en première approximation, comme une *ellipse qui pivoterait dans son plan autour de son centre, dans le sens même où elle est parcourue*. Ce phénomène, appelé *précession apsidale*, est analogue à la rotation lente observée sur des figures de Lissajous lorsqu'on décale légèrement une des fréquences.

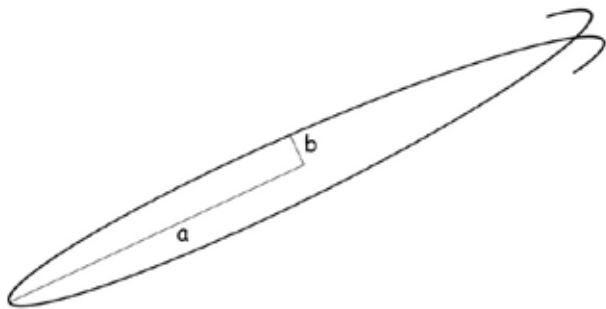


Fig.1. Rotation apsidale.

Expression de la période de précession apsidale : on trouvera un calcul limité au premier terme d'un développement en série dans l'article de G. Olsson (LeDocument, bibliographie), soit :

$$T_{apside} = \frac{8l^2}{3ab} T_{pendule} \frac{8l^2}{3ab} 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

Sachant que a/l et b/l sont les amplitudes angulaires respectivement longitudinale et transversale, nous voyons que, pour des « ovalisations » (ou excentricités) similaires, la période apsidale varie comme $l^{1/2}$: d'où, à nouveau, l'avantage d'un grand pendule alors que cette précession parasite représente la principale difficulté pour un petit pendule. Voyons des **ordres de grandeur** :

- **pour le « petit » pendule d'Orsay** : en supposant une amplitude $a = 7,5$ cm et une « ovalisation » $b = 1$ mm (ce qui est couramment observé en l'absence d'autre artifice), on obtient : $T_{apside} = 112\,000$ s. Ainsi, la vitesse de rotation apsidale est du même ordre de grandeur que la vitesse de rotation d'un pendule de Foucault placé à Paris dont la période de rotation est d'environ 32 h soit 115 000 s ; elle s'y ajoute ou s'en retranche selon le sens de la perturbation : il est clair dans ces conditions que notre petit pendule de Foucault ne peut pas fonctionner tel quel.

- **pour le « grand » pendule du Panthéon** : l'amplitude maximale au lancement est $a = 4,80$ m ; si on suppose une « ovalisation » b de l'ordre de seulement 3 cm (ce que nous avons personnellement observé), on obtient :

$T_{apside} = 1,36 \cdot 10^{-6}$ s, soit environ 16 jours. Ainsi, la vitesse de rotation apsidale est d'environ 1/16 de celle de la Terre, et les choses s'améliorent encore lorsque l'amplitude diminue par amortissement, le pendule ne possédant pas de système d'entretien. Le grand pendule possède un avantage supplémentaire : un courant d'air a relativement moins d'effet sur une grosse boule que sur une petite¹.

Le pendule du Panthéon peut donc fonctionner tel quel ; cependant, on en voit les limites, ce n'est pas une très bonne horloge !

Une expérience simple pour rendre sensible la rotation apsidale : prenez un pendule simple court : par exemple, un boulon attaché au bout d'un fil de 20 à 30 cm ; lâchez-le en lui donnant une amplitude importante et, d'une petite chiquenaude, une légère impulsion vers la droite ; le mouvement de la boule est alors approximativement une ellipse allongée ; laissez osciller librement ; au bout d'une demi-minute, vous observerez que le grand axe de l'ellipse a déjà pivoté vers la gauche de plusieurs dizaines de degrés, c'est spectaculaire ! L'amplification du phénomène est due au fait que vous avez donné au départ une amplitude importante et une « ovalisation » conséquente.

Solutions possibles du problème : deux stratégies sont possibles pour supprimer, au moins rendre négligeable, la rotation apsidale :

- a) conserver l'anharmonicité du mouvement, mais empêcher l'ellipse de se former, par un dispositif mécanique adéquat. C'est la méthode de « l'anneau de Charron » ;
- b) rendre le pendule harmonique grâce à un dispositif approprié ; la période étant alors indépendante de l'amplitude, il n'y a plus de rotation apsidale et l'axe de l'ellipse – si ellipse il y a – peut être pris comme direction d'oscillation du pendule idéal.

Rien n'interdit de cumuler les deux méthodes.

Solution par l'anneau de Charron

La présence d'une rotation apsidale entraîne nécessairement que la boule possède, dans le référentiel terrestre, une vitesse tangentielle (i.e. non radiale) à l'extrémité de chaque demi-période, y compris dans le cas des conditions initiales de type 2 où la boule « devrait » arriver radialement à chaque extrémité d'oscillation. Dans le cas des C.I. de type 1, cette composante parasite s'ajoute, dans un sens ou dans l'autre, à la composante intrinsèque résultant du mouvement de la Terre.

C'est l'ingénieur F. Charron qui apporta, en 1931, une solution extrêmement simple – géniale – à ce problème². Elle exige que le pendule soit entretenu.

¹ cf. force de surface versus force de volume.

² Charron, F., Bull. Société astronomique de France (1931), p. 457-462.

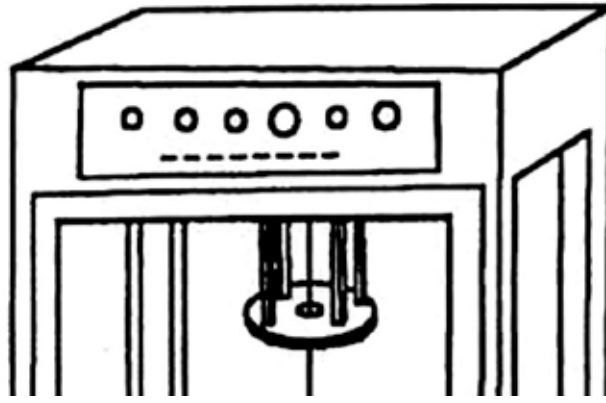


Fig.2. L'anneau de Charron du pendule d'Orsay.

Description de l'anneau de Charron

Un anneau circulaire est placé sur l'axe du fil, à une petite distance en dessous du point de suspension. L'amplitude de l'oscillation est ajustée (via le moteur d'entretien) de manière qu'à chaque demi-période, le fil vienne juste toucher le bord de l'anneau. Il faut qu'il « touche » tout juste, sans briser franchement, mais touche quand même ! Ainsi, si une composante non radiale de vitesse existe au moment du contact, elle est annulée par frottement sur l'anneau. Si cela ne réussit pas tout à fait à la première oscillation, c'est réalisé en tous cas au bout de quelques oscillations.

Ainsi, le mobile repart avec une vitesse initiale nulle relativement à l'anneau, c'est à dire relativement au référentiel terrestre : il repart donc exactement avec les C.I. de type 2 des figures 1,b et 2,b de l'article précédent *quelle que soit la façon dont il a été lancé*. Il va donc décrire l'arc suivant d'hypocycloïde ; si, au cours de cette demi-période, il acquiert une petite vitesse de rotation apsidale, celle-ci est annulée lors du contact suivant avec l'anneau. Notons que, même s'il a été lancé avec des C.I. de type 1, (ou toutes conditions intermédiaires), il repart avec des C.I. de type 2.

Le double rôle de l'anneau de Charron est donc d'empêcher l'apparition d'une rotation apsidale parasite, et d'autre part de nous rendre indépendants des conditions initiales de lancement : quelle qu'elles soient, on est toujours ramené aux C.I. de type 2 et aux trajectoires représentées sur les figures (2,b et 3,b) de l'article précédent³. C'est la justification de notre étude détaillée des formes de trajectoires : sans cela, le rôle de l'anneau de Charron serait incompréhensible. Ce système requiert quelques précautions, mais, même s'il ne saurait être parfait, il est remarquablement efficace.

³ Ceci répond à une objection qui nous avait été faite : « mais votre anneau de Charron détruit le mouvement de rotation du pendule que vous cherchez à mettre en évidence » ! Pas du tout : il nous ramène aux C.I. de type 2 qui sont parfaitement légales. La déviation se produit lors du parcours entre extrema, jamais aux extrémités.

Contraintes d'utilisation de l'anneau de Charron

Il y a quelques précautions à prendre pour que l'anneau de Charron soit réellement efficace :

- l'horizontalité de la base de l'appareil doit être très bien ajustée ;
- le fil doit toucher l'anneau « tout juste » et symétriquement de chaque côté, ce qui suppose un très bon centrage ;
- ne pas être tenté d'augmenter l'amplitude d'oscillation en espérant que « ça ira mieux ». La ligne du fil a alors une brisure nette au niveau de l'anneau. Nous avons observé que cela introduit un artefact, une augmentation systématique de la vitesse de pivotement de la direction d'oscillation, qui peut atteindre 2 à 3°/h au regard des 11,3°/h attendus à la latitude d'Orsay ; par la suite, nous avons pu lire que Charron avait lui-même prévu cet effet dans son article.

Moyennant quoi, nous obtenons des résultats tout à fait honorables avec le petit pendule d'Orsay (cf. ci-dessous).

Remarque : l'anneau de Charron nous ramène « automatiquement » à des conditions initiales de type 2 ; la trajectoire de la boule dans le référentiel de Copernic est alors déjà une ellipse, très aplatie bien sûr, de petit axe $b = a/k$ (cf. article précédent, fig. 1,b). Il y a donc déjà une rotation apsidale (dans le sens direct) indépendamment de la rotation de la Terre, et indépendamment de toute perturbation. Cet effet peut-il être négligé ?

Revenant à l'équation (5), avec $b = a/k$ et

$T_{\text{Terre}} / T_{\text{Pendule}} = k$ nous obtenons pour cette « rotation apsidale intrinsèque » :

$$\frac{T_{\text{aps.intr.}}}{T_{\text{Terre}}} = \frac{8}{3} \frac{1}{\theta_0^2} \quad (6)$$

valeur indépendante de la longueur du pendule. Pour une amplitude de 1/16 radian, cette rotation a une période atteignant 600 jours, cet effet peut donc être négligé.

Il deviendrait notable aux grandes amplitudes, mais personne n'aurait l'idée de faire fonctionner un pendule de Foucault à des amplitudes de plusieurs dizaines de degrés, les effets d'anharmonicité s'aggravant alors considérablement.

Faut-il un anneau de Charron sur un « grand » pendule ?

Un anneau de Charron aurait-il du sens sur un grand pendule *non entretenu* (type Panthéon) ? *a priori*, non, le fil ne touchant plus l'anneau au bout de quelque temps à cause de l'amortissement. Cependant cet avis doit être relativisé. Nous savons qu'il est important de lancer le pendule sans déviation initiale afin de limiter toute ovalisation. Même si votre lancement n'est pas parfait, l'anneau de Charron vous ramènera rapidement aux conditions initiales de type 2 : au moins, vous aurez un « bon » départ. Ensuite, dès que l'amortissement deviendra sensible, il ne servira plus à rien. Si, de plus, le pendule est entretenu, l'anneau ne peut qu'améliorer les choses. En conclusion, je n'hésiterais pas à prévoir un anneau de Charron dans tous les cas !

Pendule d'Orsay : résultats

Rappel des caractéristiques du pendule d'Orsay : longueur 1,20 m ; fil textile tissé ; masse de la boule 250 g ; avec anneau de Charron (cf. fig. 2) ; oscillations entretenues. Réalisation : société ELLWE (1998), sur un modèle plus ancien de Leybold. L'entretien est réalisé selon le principe de celui de Foucault en 1855 (exposition universelle), sauf que le passage par la verticale est désormais détecté par une cellule photoélectrique.

Résultats.

Sur le long terme (des jours, des semaines en continu), des résultats très proches de la valeur théorique (11,3°/h) attendue à Orsay, sont obtenus (cf. figure 3). En revanche, pour un si petit pendule, le fonctionnement sans anneau de Charron serait totalement erratique ; il suffit pour s'en apercevoir, de réduire légèrement la puissance d'entretien de manière que le fil ne touche plus l'anneau. Notons toutefois que si le comportement avec l'anneau est remarquablement bon sur le long terme, des écarts importants (de 1 ou 2°/h, voire plus) s'observent sur

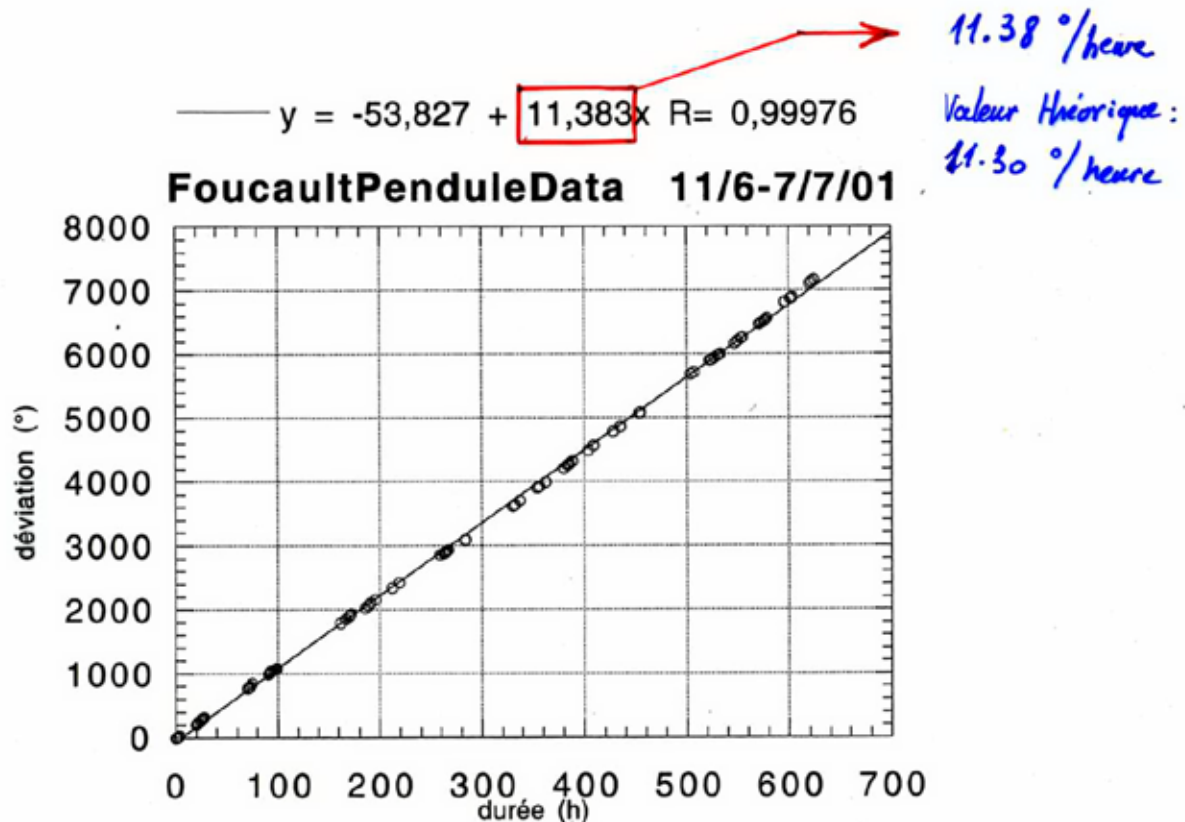


Fig.3. Déviation cumulée du pendule d'Orsay : enregistrement sur trois semaines ; pente moyenne observée 11,38°/h ; pente théorique attendue : 11,3°/h, soit un tour en 32 h environ.

le court terme soit quelques heures (voir zoom in : LeDocument, 4.2.2 et fig. 4.3,*bas*). L'anneau de Charron permet de rendre visible la rotation de la Terre avec un petit pendule, mais il ne peut tout. Insistons sur le fait que, si vous voulez obtenir un résultat correct avec un petit pendule, il faut l'observer non pas pendant quelques heures, mais pendant des jours, les écarts aléatoires se moyennant partiellement en un temps caractéristique de l'ordre, non d'heures, mais de jours⁴.

Un autre exemple avec anneau de Charron

Notre collègue Éric Durand, professeur de sciences physiques, a réalisé dans la décennie 2000 au collège Jean Vilar de Grigny (91), un excellent Pendule entretenu « déplaçable » de hauteur intermédiaire : 4 m (voir image in : LeDocument, 4.2.3). Cet instrument remarquablement fonctionné à partir du moment où un anneau de Charron lui a été adjoint – et seulement à partir de ce moment – avec les mêmes contraintes de réglage qu'à Orsay. Il est désormais exposé au musée de l'École polytechnique « Mus'X » à Palaiseau.

⁴ Vifs remerciements à Vincent Ezratti, technicien au premier cycle de la faculté d'Orsay, qui assure depuis de longues années le réglage précis de ce pendule.

Autres solutions

Linéariser l'équation du mouvement via un dispositif adéquat

La seconde solution consiste à rendre le mouvement du pendule harmonique.

Pour que le mouvement soit harmonique, il faudrait que la force de rappel soit proportionnelle à l'élongation elle-même. Or, sur $(\theta, \pi/2)$, le sinus de l'angle est toujours inférieur à l'angle. La force de rappel est donc trop faible aux grands angles, ou, ce qui revient au même, trop forte aux petits angles, il faut donc la réduire dans la zone centrale. On trouvera dans (LeDocument, section 4.3) la description du dispositif électromagnétique réalisé dans les années 1990 par des collègues de l'université Pierre et Marie Curie. Leur pendule, plus important que le nôtre (longueur 2 m, masse 2 kg), a ultérieurement été donné au Palais de la Découverte où il se trouve toujours. Les auteurs ont mis toutes les chances de leur côté en ajoutant un anneau de Charron.

Suggestion : un anneau de Charron cycloïdal ?

Nous basant sur le principe du pendule cycloïdal de Huygens, nous suggérons (voir LeDocument, 4.3.2), un « anneau de Charron cycloïdal », dispositif entièrement passif qui cumulerait les avantages des deux stratégies ci-dessus. À essayer ! Qui s'y lancerait ? Ce sera notre conclusion.



Pendule réalisé par Éric Durand, professeur de sciences physiques au collège Jean Vilar de Grigny (91). Photo P. Lauginie.