

LE PENDULE DE FOUCAULT (III)

LE PENDULE HORS DU PÔLE. LOI DU SINUS ET TRANSPORT PARALLÈLE

Pierre Lauginie

Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay. Université Paris-Saclay
pierre.lauginie@universite-paris-saclay.fr

Suite des articles parus dans les CC 182 et 183

Introduction

Vous êtes revenu de votre rêve de pendule de Foucault – dit « le Pendule » – au pôle Nord. C'est la fête de la science : vous avez maintenant installé le Pendule un soir dans les jardins de l'Observatoire à Paris. La direction d'oscillation ne pointe plus vers aucune étoile fixe, et semble faire le tour du lieu en près de 32 heures. La Terre a ralenti ? Ou quoi ? Un étudiant du « Sud » ajoute qu'en son pays le pendule « ne pivote pas ». Un quidam « naïf » (mais savant) vient affirmer – contre toute évidence – que la direction d'oscillation « n'a pas dévié depuis que vous l'avez lancé ». Aurait-il raison ?

Nous *devons* comprendre. Aller à l'équateur. Revenir à l'Observatoire. Réfléchir à l'étrange remarque de notre quidam : qu'est-ce donc que « conserver sa direction d'oscillation » lors d'un déplacement sur une surface courbe ? Voilà le programme.

1 Le Pendule à l'équateur

Nous avons vu dans le premier article que, lorsque le Pendule est placé au pôle Nord, sa direction d'oscillation pivote autour de la verticale dans le sens horaire à raison d'un tour en un jour sidéral, soit à la vitesse angulaire $-\Omega$ opposée à celle de la Terre.

Nous savons aussi que, dans le référentiel terrestre, la force totale subie par la boule de centre M est la somme de trois forces :

- la force de rappel due à la gravité, dirigée suivant OM (la même que dans le référentiel de Copernic) ;
- la force d'inertie centrifuge ;
- la force d'inertie dite « de Coriolis » : proportionnelle à la vitesse angulaire Ω de la Terre et à la vitesse relative $\vec{v}_r$ de la boule dans le référentiel terrestre, elle est dirigée *vers la droite du mouvement* pour une rotation diurne dans le sens direct (cas de l'hémisphère Nord). Elle s'exprime de façon générale par le produit vectoriel (LeDocument, 1.2.4, eq. 1.21) :

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -m\vec{a}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \quad (1)$$

$\vec{\Omega}$ étant le vecteur axial « rotation de la Terre » : parallèle à l'axe de la Terre, dirigé sud-nord et de module égal à la vitesse angulaire Ω de la Terre.

À l'équateur, le vecteur $\vec{\Omega}$ est horizontal, tangent au méridien local (cf. fig. 1). La vitesse relative de la boule est également horizontale, donc la force de Coriolis est verticale (ou nulle lorsque $\vec{v}_r$ est tangente au méridien) et ne provoque aucune déviation. De même pour la force centrifuge (verticale à l'équateur). Aucune force n'est donc présente pour dévier la boule de sa direction initiale d'oscillation (voir commentaire in : LeDocument, 2.1).

Ainsi,

À l'équateur, le pendule de Foucault ne pivote plus dans le référentiel terrestre !

Remarque : une approximation ? Au pôle, la force centrifuge s'introduit de manière naturelle lors du changement de référentiel (cf. LeDocument, 1.2.4) ; ce terme est indispensable pour obtenir le plus simplement possible la solution au pôle – de plus, *rigoureuse* et valable pour toute vitesse de rotation – bien que ce terme centrifuge soit négligeable dans le cas de la Terre réelle. À l'équateur, aurions-nous donc oublié quelque chose ? La réponse, en toute rigueur, est oui.

Nous avons dit : à l'équateur, la force centrifuge est verticale. Cela est vrai si la boule reste dans le plan de l'équateur. Or, pour un lancement dans une direction quelconque, la boule sort du plan de l'équateur ! En toute rigueur, et pour une supposée Terre tournant « très vite » (un pulsar !), on montre (LeDocument, section 2.2 et annexe B) qu'il en résulte une composante centrifuge horizontale, dirigée non vers l'origine mais vers l'équateur et proportionnelle à la distance de la boule à l'équateur : en conséquence, les oscillations nord-sud et est-ouest n'ont plus tout à fait la même fréquence. Cela entraîne une lente dérive du plan d'oscillation vers le plan équatorial, seul plan d'oscillation stable à très long terme¹. Bien entendu, cette dérive est négligeable dans le

¹ On peut faire remarquer que la force de Coriolis également n'est plus strictement verticale pendant l'oscillation, mais, contrairement à la force centrifuge, les déviations sont en sens inverse pour les demi-oscillations Sud et Nord de part et d'autre de l'équateur respectivement et se compensent.

cas de la Terre réelle, son temps caractéristique étant de l'ordre de milliers de jours. Cela est important du point de vue de la cohérence de notre analyse : *rigoureuse* au pôle, mais *minuscule approximation* à l'équateur.

2 Le Pendule en un lieu de latitude quelconque

2.1 La loi du sinus

Soit maintenant un lieu de latitude quelconque λ (différente de 0 et de $\pi/2$). Le vecteur rotation de la Terre n'est ni vertical comme au pôle, ni horizontal comme à l'équateur (cf. fig. 1). Que va-t-il se passer ? Eh bien : nous sommes à la fois au pôle et à l'équateur. Expliquons-nous.

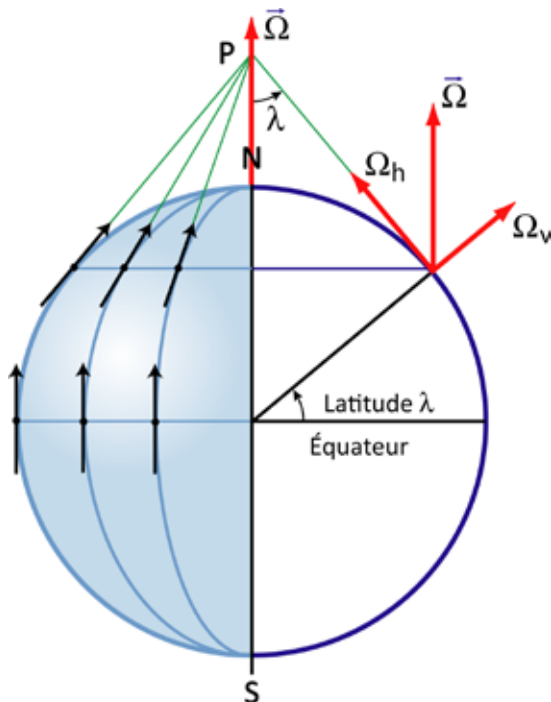


Fig.1. **Partie droite** : coupe selon un demi-plan méridien. (décomposition du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ en ses composantes horizontale $\vec{\Omega}_h$ et verticale $\vec{\Omega}_v$). **Partie gauche** : vue perspective de la Terre ; le long d'un parallèle, les tangentes aux méridiens convergent en un point P situé sur l'axe SN de la Terre, sauf à l'équateur où elles sont toutes parallèles à cet axe.

Suivant Liouville, décomposons le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ en ses composantes respectivement horizontale $\vec{\Omega}_h$ et verticale $\vec{\Omega}_v$ (cf. fig. 1) ; cela donne la clé de l'interprétation du pendule de Foucault en tout lieu. On a :

$$\Omega_v = \Omega \cdot \sin \lambda \quad \Omega_h = \Omega \cdot \cos \lambda$$

À la fois, le plan horizontal local pivote autour de la verticale à vitesse $\Omega \cdot \sin \lambda$ et « bascule » autour de la tangente au méridien (horizontale nord-sud) à vitesse $\Omega \cdot \cos \lambda$

- pour la *composante verticale* ou « polaire » : $\Omega \cdot \sin \lambda$ tout se passe comme si nous étions au pôle d'une Terre fictive qui tournerait autour de la verticale à la vitesse angulaire $\Omega \cdot \sin \lambda$. Cette composante produit donc une force d'inertie de Coriolis horizontale, dirigée vers la droite du mouvement, comme au pôle ;

- la *composante horizontale* ou « équatoriale » $\Omega \cdot \cos \lambda$ ne contribue pas à la rotation du plan d'oscillation : en effet, tout se passe comme si nous étions sur l'équateur d'une Terre fictive qui tournerait à la vitesse angulaire $\Omega \cdot \cos \lambda$ autour de la direction de la tangente au méridien. Cet « équateur », que nous appellerons « équateur local » n'est autre que le grand cercle situé dans le plan diamétral de la Terre passant par le lieu du pendule et incliné de l'angle λ sur le plan équatorial de la Terre réelle (cf. fig. 1) ; il est tangent au parallèle du lieu. Cette composante « équatoriale » donne lieu, nous l'avons vu, à une force de Coriolis verticale, *qui ne modifie donc pas la direction du mouvement*.

Il s'ensuit que tout se passe comme si la vitesse de rotation de la Terre était simplement réduite par le facteur $\sin \lambda$ et donc :

l'analyse effectuée pour le pendule de Foucault au pôle est valable à toute latitude λ à la condition de remplacer Ω par $\Omega \cdot \sin \lambda$. En particulier, la période de rotation du plan d'oscillation, égale à un jour sidéral au pôle, est multipliée par $1/\sin \lambda$.

On ne peut faire plus simple !

Exemples - À Paris (latitude $48^\circ 51' N$),

$\sin \lambda = 0,753$; le plan d'oscillation « pivote » autour de la verticale à raison d'un tour en un peu moins de 32 h (31 h 47 min exactement), soit 11,3 °/h ou environ 3/4 tour (270°) par jour ; à Rome il effectuerait un tour en 36 h, au Caire en 48 h, à Mascate en 60 h, à Abidjan en 257 h, soit près de 11 jours (mais dans ce dernier cas, il est douteux que l'on puisse observer quelque chose). Dans l'hémisphère Sud, la rotation reprend, mais en sens inverse.

2.2 Suggestions de vidéos

Nous recommandons les vidéos suivantes (voir détails in : LeDocument, 3.3) :

- la maquette-modèle de Serge Picard au musée des Arts et Métiers :

<https://www.dailymotion.com/video/xfzx8i>

- la vidéo « ferroviaire » d'Alain Bernard :

<https://www.youtube.com/watch?v=YhXLxc1hzmM>

2.3 Force centrifuge : des approximations ?

2.3.1 Correction statique de la verticale

La force centrifuge, s'exerçant dans le plan du parallèle, possède une composante horizontale toujours dirigée vers le sud dans l'hémisphère Nord. Il s'ensuit une déviation statique de la verticale locale, assimilable à une correction de latitude $\delta\lambda$ vers le nord. On montre (LeDocument, 3.2) que cette correction, maximale à la latitude de 45° et nulle au pôle et à l'équateur, n'atteint pas 6' à son

maximum (soit 11 km le long du méridien) et peut donc être négligée en pratique.

2.3.2 L'approximation « Terre lente »

L'analyse faite précédemment à l'équateur est évidemment valable pour notre « équateur local » : en déclarant nulle la contribution relative à la composante Ω_h nous faisons une minuscule approximation. C'est la raison pour laquelle, contrairement au cas du pôle, la « loi du sinus » ne peut être déduite *a priori* des premiers principes, lesquels ignorent évidemment quelles approximations nous avons l'intention de faire. Mais nous savons maintenant à quoi nous en tenir :

- résultat rigoureux² pour la composante « polaire » Ω_v ;
- minuscule approximation lorsque nous négligeons la contribution de la composante « équatoriale » Ω_h .

Cette approximation entre dans le cadre de l'approximation générale dite *adiabatique*³ (en mécanique classique comme en quantique) : les paramètres – ici l'angle horaire de la Terre – doivent varier *lentement* par rapport au phénomène principal – ici la période du pendule. Concluons :

Dans l'approximation d'une Terre tournant lentement par rapport à la période du Pendule - dite « approximation adiabatique » - la loi des sinus est valable.

2.3.3 Commentaire pédagogique

Une question se posait : pourquoi, alors que le traitement mathématique complet au pôle – incluant la force centrifuge – est à la fois rigoureux et le plus simple, pourquoi donc n'en est-il plus de même hors du pôle ?

Nous avons vu la difficulté à l'équateur, et par voie de conséquence, en tout lieu hors du pôle : les oscillations nord-sud et est-ouest n'ayant plus strictement la même fréquence, le problème complet devient compliqué à mettre en équation. De nombreux exposés classiques traitant directement le cas à une latitude quelconque font alors l'approximation – tout à fait justifiée – de négliger la force centrifuge dans l'équation du mouvement. Cela conduit à une légère modification de la pulsation du pendule – et donc de sa période – dans le référentiel terrestre, ce qui est absurde, et requiert donc une seconde application de l'approximation⁴. C'est particulièrement flagrant au pôle où le traitement complet sans approximation conduit directement et beaucoup plus simplement au résultat rigoureux, sans changement de période (cf. LeDocument,

² Obtenue par une démarche similaire à celle effectuée au pôle, ce résultat inclut donc, sans approximation, la contribution centrifuge relative au pôle d'une Terre tournant à la vitesse $\Omega_v = \Omega \sin \lambda$.

³ Par extension du terme « adiabatique » – pas d'échange de chaleur entre deux systèmes – connu en thermodynamique.

⁴ Qu'il ne faut pas oublier de faire ! Il n'est pas besoin de fouiller longtemps sur internet pour trouver que, « dans le référentiel terrestre, la pulsation du pendule placé au pôle n'est pas ω mais $\sqrt{\omega^2 + \Omega^2}$ ».

1.2.6).

Avec notre démarche « pôle, équateur, puis pôle + équateur », on a un traitement rigoureux de la composante « polaire », on sait exactement où est l'approximation et surtout où elle n'est pas.

3 Une autre vision de la loi du sinus : le « transport parallèle »

« Et moi je vous dis que la direction d'oscillation de votre pendule n'a pas bougé depuis que vous l'avez lancé ! » (cf. le quidam de l'Observatoire).

Vous êtes à la mosquée de Cordoue, merveille des architectes andalous. Curieusement, le *mirhab* n'indique pas du tout la direction de La Mecque – la *qibla* – exception rare dans le monde musulman. Vous vous dites : voyons, où donc aurait-il fallu le placer pour qu'il soit « tourné vers La Mecque » ? Et brusquement tout se complique : c'est quoi, vue de Cordoue, la direction de La Mecque ? Est-ce en y allant à cap (azimut) constant – selon la loxodromie ? Mais si vous continuez sans fin à cap constant, vous allez finir par vous enrouler autour du pôle Sud. Drôle de chemin pour une « direction constante » ! Serait-ce d'y aller par le plus court chemin – l'orthodromie, un arc de grand cercle ? Alors la direction de départ est différente de la précédente et vous devez changer continûment de cap au fur à mesure de votre avancement. Que décider⁵ ?

Cette anecdote montre que, sur une sphère – plus généralement sur une surface courbe – la phrase : « se déplacer toujours dans la même direction » n'a pas de sens univoque, contrairement au plan euclidien. *A fortiori*, la phrase : « se déplacer en regardant dans une direction constante ». Et donc, bien que notre Pendule, hors pôle ou équateur, ne « regarde » dans une direction fixe ni par rapport au repère local (méridien/parallèle), ni par rapport aux étoiles, cela nous impose de chercher en quel sens notre quidam de l'Observatoire pourrait éventuellement avoir raison.

3.1 Le transport parallèle sur une surface courbe

Considérons une sphère, la sphère terrestre⁶. Faisons rouler un plan, de façon quelconque, sur la sphère : le point de contact décrit sur la surface une certaine courbe Γ . Inversement, étant donné une courbe Γ (suffisamment régulière) sur la sphère, attachons en chaque point un vecteur tangent à la sphère et dont l'orientation peut varier d'un point à un autre. Notons que, sur la sphère, la direction d'un vecteur local n'a de sens que dans le plan tangent. Faisons rouler le plan tangent le long de Γ ,

⁵ La tradition musulmane choisit en principe l'orthodromie, connue dès le IX^e siècle.

⁶ Mais cela pourrait être toute surface courbe munie d'une connexion (c'est à dire une notion de distance et d'angle) et admettant en tout point un plan tangent.

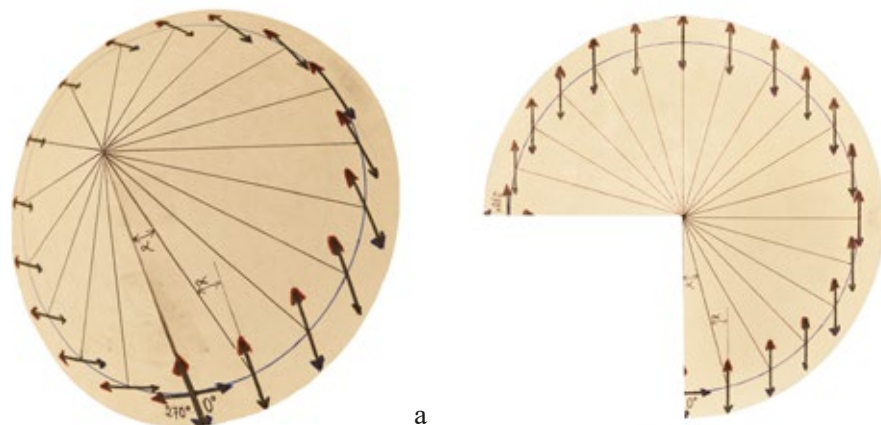


Fig.2. L'aplatissement du cône : a) Le cône tangent au parallèle de Paris ($\sin \lambda = 0,75$) vu en perspective ; b) le cône développé, ou « aplati ». Les flèches indiquent la direction d'oscillation d'un pendule de Foucault initialement lancé vers le nord. Au bout d'un tour de Terre, il oscille dans la direction Est-Ouest.

nous l'appellerons le *plan rouleur* : en chaque point de contact, marquons sur ce plan la trace du vecteur attaché à ce point. Ensuite regardons l'ensemble des traces sur le plan rouleur⁷.

Définition : si, et seulement si, toutes les traces sur le plan rouleur sont parallèles entre elles, on dit que le vecteur a subi un *déplacement parallèle* sur la surface de la sphère le long de la courbe Γ .

Voilà donc une « bonne » définition de : « je me déplace sur la sphère en regardant toujours dans la même direction ».

Déplaçons le long d'un parallèle – par exemple le parallèle de Paris – un vecteur toujours dirigé vers le Nord. Subit-il un *déplacement parallèle* ?

Pour le voir, considérons le *plan rouleur* le long du parallèle : au cours du déplacement, ce plan enveloppe un cône dont les génératrices sont les tangentes aux méridiens le long du parallèle et dont le sommet se trouve quelque part au-dessus du pôle sur l'axe sud-nord de la Terre (fig. 1 et 2,a ; voir aussi LeDocument 3.4.2). Le demi-angle au sommet de ce cône est exactement la latitude λ du parallèle. Couper le cône suivant une génératrice et « aplatir » l'ensemble – c'est à dire « développer le cône » (fig. 2,b) –, c'est donc exactement se placer dans le plan rouleur. Sur le cône aplati, tous les méridiens convergent au centre, et ne sont donc pas parallèles : notre vecteur, « toujours dirigé vers le nord » n'a donc pas subi un transport parallèle. Idem pour un vecteur qui ferait un angle constant avec le méridien.

Sauf – il y a une exception – si le parallèle est l'équateur lui-même : en ce cas, le cône dégénère en un cylindre, toutes les tangentes aux méridiens sont parallèles à l'axe de la Terre et donc, tout vecteur se déplaçant sur l'équateur en gardant un azimut constant subit un déplacement parallèle. On dit que l'équateur est une *courbe auto-parallèle*. Il en serait de même pour tout grand cercle tracé sur la sphère. Les arcs de grands cercles sont aussi

les courbes de chemin minimal entre deux points, c'est à dire les « géodésiques » de la sphère. C'est un fait général : sur une surface courbe munie d'une connexion, les géodésiques sont des courbes auto-parallèles. Des détails supplémentaires sur le transport parallèle sont donnés dans (LeDocument 3.4.1 et 3.4.2, et annexe C).

3.2 Application au Pendule : le cône de Bel-field-Lefèvre

Revenons au Pendule, supposé installé à l'Observatoire de Paris. Au cours de la rotation de la Terre, son point d'attache décrit le parallèle de Paris. Il revient au même de supposer une Terre fixe et un Pendule se déplaçant le long du parallèle. Sa direction d'oscillation (par exemple définie à chaque extremum pair) sera représentée en chaque point par un vecteur $\vec{V}$ du plan tangent : ce sera le vecteur mobile envisagé plus haut.

Nous nous plaçons d'emblée dans *l'approximation « Terre lente »* : la *loi du sinus* est donc établie et acceptée.

Or, il est une propriété du cône circulaire de demi-angle au sommet λ : pour une rotation dans le sens antihoraire d'angle θ autour de l'axe du cône (i.e. rotation de la Terre de cet angle), l'angle entre les génératrices (ici, les tangentes aux méridiens) *sur le cône développé – ou aplati* – est $\theta \cdot \sin \lambda$. (voir démonstration : LeDocument 3.4.1 et fig. 3.3). Nous savons, *d'après la loi du sinus*, que notre vecteur $\vec{V}$ aura tourné, par rapport à la tangente au méridien, du même angle *mais en sens inverse* : il aura donc une direction constante sur le cône développé, c'est à dire *dans le plan rouleur* (cf. fig.2.b). Conclusion :

Lors de la rotation de la Terre, la direction d'oscillation d'un pendule de Foucault placé à Paris subit un transport parallèle le long du parallèle de Paris. En ce sens, on peut dire que le Pendule conserve, sur la sphère, une direction d'oscillation constante.

⁷ Les mathématiciens dénomment ce plan le *fibré tangent*. On peut le voir comme la superposition de calques tangents à la sphère en chaque point de la courbe, chacun portant la trace locale du vecteur transporté.

Ceci est l'essence même de la notion de transport parallèle : le vecteur transporté *compense* à chaque instant la rotation intrinsèque du repère local par une rotation de même valeur en sens inverse. Notre quidam de l'Observatoire est donc justifié ! De fait, il avait un lointain prédécesseur : Belfield-Lefèvre, un ami de Foucault, avait compris dès 1851 – sans référence à la notion de transport parallèle non encore élaborée – cette compensation entre la rotation du méridien et celle du Pendule : l'idée de l'aplatissement du cône et des directions d'oscillations toutes parallèles, c'est lui ! (voir le livre de W. Tobin in LeDocument, Bibliographie).

3.3 L'intuition de Léon Foucault

On montre que lors du transport parallèle d'un vecteur $\vec{V}$, la variation élémentaire du vecteur dans l'espace (sa différentielle) est perpendiculaire au plan tangent ; sa projection sur le plan tangent (sa « différentielle absolue ») est nulle, et donc la variation du vecteur dans l'espace est minimale. Prenant comme vecteur la direction d'oscillation du Pendule, cela rejoint une intuition géométrique remarquable de Foucault – considéré à l'époque comme « piètre mathématicien » – qu'il exprime dans une lettre non publiée (voir : LeDocument, Bibliographie, Le Recueil, p. 382-384) :
« Je commence par poser effrontément un postulat tel que celui-ci :

Quand la verticale, toujours comprise dans le plan d'oscillation change de direction dans l'espace, les positions successives du plan d'oscillation, sont déterminées par la condition de faire entre elles des angles minima. Autrement dit et en langue vulgaire : lorsque la verticale sort du plan d'impulsion primitive, le plan d'oscillation la suit en restant aussi parallèle que possible. »

4 Conclusion

Dans le référentiel terrestre, Ω étant la vitesse angulaire de rotation diurne de la Terre, à toute latitude λ et *sous l'approximation « Terre lente »* (dite "approximation adiabatique"), nous avons deux énoncés équivalents :

- 1 - le plan d'oscillation du pendule de Foucault pivote autour de la verticale à la vitesse angulaire $\Omega \cdot \sin \lambda$;
- 2 - la direction d'oscillation du pendule subit un *transport parallèle* le long du parallèle du lieu. Au sens du *déplacement parallèle sur une surface courbe*, cette direction reste constamment parallèle à elle-même.

Le quidam de l'Observatoire avait raison !



Errata

Dans l'article sur le pendule du CC 182 Il fallait lire :

- p. 47, col 1, ligne 14 : Ω et non W ; même chose page 48 col 1 dernière ligne.
 p. 47, col 2, 7 lignes avant la fin remplacer : (-1, 0) par (0, -1).

Dans l'article sur le pendule du CC 183 Il fallait lire :

- p. 40, col 2, sous la formule (2) : $\theta_0 = X_0/l$ et non $q_0 = X_0/l$.
 p. 41, ligne 1 : θ_0 et non q_0 .
 p. 42, formule (5) : il manque un signe « = » après T_{pendule} .
 p. 45, col 2, ligne 8 : $(0, \pi/2)$ et non $(\theta, \pi/2)$.